

УДК 519.61

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ИНТЕРВАЛА

В.И. Левин

*Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия
vilevin@mail.ru*

Аннотация

Рассмотрены существующие подходы к расчёту, анализу, синтезу и оптимизации систем в условиях неопределённости. Сформулирована и подробно описана задача вычисления и анализа поведения неполностью определённой функции, заданной с точностью до интервала возможных значений. Для решения этой задачи предложен алгоритм детерминизации, который позволяет свести задачу к двум аналогичным – для верхней и нижней граничных функций исходной неполностью определённой функции. В этом алгоритме используется аппарат интервальной математики и интервально-дифференциального исчисления. Выделены различные типы возможного поведения интервальных функций (постоянство, возрастание, убывание, расширение, сужение) и различные типы экстремальных точек этих функций (точка максимума, точка минимума, точка максимального расширения, точка минимального расширения). Доказаны теоремы, позволяющие выделять участки различного поведения интервальных функций и точки с различными видами их экстремума. Подробно описана работа предложенного алгоритма детерминизации, позволяющего анализировать поведение интервальных функций. Эта работа проиллюстрирована на конкретном примере.

Ключевые слова: *оптимизация систем, неопределённость, детерминированная функция, интервальная функция, анализ поведения функций.*

Введение

Современная наука и практика обработки информации успешно справляется с задачами исследования различных систем с полностью определёнными (детерминированными) параметрами. Эти задачи обычно формулируются как задачи расчёта, анализа и синтеза тех или иных функций с детерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками изучаемых систем. Но на практике часто встречаются другие системы – системы с неточно известными, т.е. неполностью определёнными (недетерминированными) параметрами. Причины появления таких систем заключаются в естественной неопределённости, свойственной многим реальным процессам, происходящим в системах; в неточном задании параметров большинства систем из-за неизбежных погрешностей при их вычислении или измерении; в изменении во времени параметров систем; в необходимости или целесообразности совместного исследования целых семейств однотипных систем, имеющих одинаковые функции-характеристики и различающиеся лишь значениями параметров этих функций. Учёт неопределённости систем особенно важен при их проектировании, поскольку полная определённость в работе системы появляется лишь на последних этапах её создания.

Исследование введённых неопределённых систем формулируется в виде задач расчёта, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих соответствующими характеристиками данных систем. Все эти задачи значительно сложнее их вышеупомянутых детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Усложнение связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел сложнее алгебры детерминированных чисел.

В настоящей статье рассматриваются задачи расчёта и анализа неточно заданных (недетерминированных) функций интервального типа. В качестве математического аппарата используется интервальная алгебра и интервально-дифференциальное исчисление.

1 Постановка задачи

Рассмотрим обычную (детерминированную) функцию одной независимой переменной

$$(1) \quad y = f(x),$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x в заданное множество $Y = \{y\}$ зависимых переменных y в соответствии с некоторым законом f , который и называется функцией. Хорошо известно, что задача расчёта (вычисления значений) функции (1) решается с помощью адекватного этой задаче математического аппарата алгебры вещественных чисел, при использовании подходящих методов вычисления, а задача анализа поведения функции (1) – с помощью адекватного ей аппарата классического дифференциального исчисления [1].

Рассмотрим теперь недетерминированную (конкретно, интервальную) функцию одной независимой переменной [2]

$$(2) \quad \tilde{y} = \tilde{f}(x),$$

однозначно отображающую заданное множество $X = \{x\}$ независимых вещественных (как и в (1)) переменных x в заданное множество $\tilde{Y} = \{\tilde{y}\}$ зависимых переменных-интервалов $\tilde{y} = [y_1, y_2]$, в соответствии с законом \tilde{f} , который и называется интервальной функцией. По определению (2), любую интервальную функцию \tilde{f} можно представить в виде пары обычных функций f_1, f_2

$$(3) \quad \tilde{f} = \{f_1, f_2\},$$

которые имеют вид

$$(4) \quad y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

Из соотношений (3), (4) видно, что интервальная функция \tilde{f} эквивалентна паре обычных функций f_1, f_2 , из которых первая однозначно отображает заданное множество $X = \{x\}$ независимых переменных x функции \tilde{f} в множество $Y_1 = \{y_1\}$ нижних границ интервалов $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – зависимых переменных этой функции, а вторая однозначно отображает то же множество $X = \{x\}$ в множество $Y_2 = \{y_2\}$ верхних границ интервалов $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ – зависимых переменных функции.

Задача настоящей работы заключается в построении двух систематических процедур (алгоритмов), связанных с изучением интервальных функций вида (2). А именно:

- процедуры расчёта (вычисления значений) интервальной функции;
- процедуры анализа поведения интервальной функции.

2 Решение задачи вычисления интервальной функции

Начнём с решения задачи расчёта (вычисления значений) интервальной функции. Здесь возможны два случая.

Случай 1. Интервальная функция задана в разделённом виде, в котором верхняя и нижняя границы интервального значения функции выражены каждая по отдельности. Этот вид представления интервальной функции вытекает из соотношений (2)–(4). Именно, из (2), (3) следует явное представление интервальной функции в виде интервала

$$(5) \quad [y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)],$$

границы которого согласно (5) выражаются формулами

$$(6) \quad y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

Итак, вычисление интервального значения $\tilde{y} = [y_1, y_2]$ интервальной функции (2), соответствующего значению x независимой переменной этой функции, осуществляется по алгоритму:

Шаг 1. Записываем вычисляемую интервальную функцию (2) в разделённом виде (5), (6) с помощью нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций функции (2).

Шаг 2. Вычисляем нижнюю граничную функцию f_1 , используя для этого какой-либо подходящий известный метод вычисления обычных (детерминированных) функций [3].

Шаг 3. Вычисляем соответствующую верхнюю граничную функцию f_2 , используя ту же методику, что и на шаге 2.

Шаг 4. Соединяя вычисленные значения нижней f_1 и верхней f_2 граничных функций, получим явное представление (5) вычисленной интервальной функции (2) в виде интервала.

Случай 2. Интервальная функция задана в неразделённом виде, т.е. в виде суперпозиции элементарных интервальных функций: интервального сложения и вычитания, умножения интервала на вещественное число, умножения и деления интервалов [4]. В этом случае перед собственно вычислением интервальной функции приводится к разделённому виду, после чего к функции применяется алгоритм случая 1. Приведение любой интервальной функции к разделённому виду можно осуществить с помощью основных формул интервальной математики, выражающих результаты элементарных преобразований интервалов [4]:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \quad [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]; \\ k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \quad [a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j} (a_i \cdot b_j), \max_{i,j} (a_i \cdot b_j)]; \\ [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1]. \end{array} \right.$$

Пример. Привести в области $x \geq 0$ к разделённому виду интервальную функцию

$$\tilde{y} = ([2, 3]x + [1, 2]x) \cdot ([5, 7]x + [4, 6]x).$$

Решение. Применяя к заданной интервальной функции последовательно третью, первую и четвёртую формулы (7), получим нужный вид функции

$$\begin{aligned} \tilde{y} = [y_1, y_2] &= ([2x, 3x] + [x, 2x]) \cdot ([5x, 7x] + [4x, 6x]) = [3x, 5x] \cdot [9x, 13x] = \\ &= [\min(3 \cdot 9x^2, 3 \cdot 13x^2, 5 \cdot 9x^2, 5 \cdot 13x^2), \max(3 \cdot 9x^2, 3 \cdot 13x^2, 5 \cdot 9x^2, 5 \cdot 13x^2)] = [27x^2, 65x^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, $y_1 = 27x^2$, $y_2 = 65x^2$, и, наконец, разделённая форма заданной интервальной функции $\tilde{y} = [y_1, y_2] = [27x^2, 65x^2]$.

3 Решение задачи анализа поведения интервальной функции: сравнение интервалов

Перейдём к описанию уже упомянутой ранее (раздел 1) задачи анализа поведения интервальной функции. Постановка этой задачи аналогична постановке задачи анализа поведения обычной детерминированной функции и включает, в первую очередь, отыскание:

- 1) интервалов возрастания функции;
- 2) интервалов убывания функции;
- 3) интервалов постоянства значений функции;
- 4) точек максимума функции;
- 5) точек минимума функции.

Кроме того, постановка задачи анализа поведения интервальной функции может включать отыскание особых интервалов (особых точек) такой функции. Существование таких интервалов (таких точек) связано с интервальным характером этой функции. У обычных детерминированных функций такие интервалы (точки) отсутствуют.

Очевидно, что решение задач анализа поведения интервальной функции требует сравнения величин интервалов. В связи с этим ниже кратко изложены основные результаты теории сравнения интервалов [5, 6]. Данные результаты составляют теоретическую базу детерминистического подхода к принятию решений в условиях интервальной неопределённости. Теоретические основы других возможных подходов к принятию решений в условиях неопределённости можно найти в литературе [7–10]. Принятие решений в условиях неопределённости является важной составной частью онтологии проектирования [11].

Рассмотрим два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$. Попытаемся сравнить величины этих интервалов, рассматривая их как интервальные числа. Прямое сравнение интервалов \tilde{a} и \tilde{b} на основе отношений отдельных пар вещественных чисел (a_i, b_j) , где $a_i \in \tilde{a}, b_j \in \tilde{b}$, не всегда возможно. Действительно, в общем случае одни пары чисел будут находиться в отношении $(a_i > b_j)$, а другие – в противоположном отношении $(a_i < b_j)$. Поэтому остаётся только реализовать сравнение интервалов на теоретико-множественном уровне, рассматривая каждый из интервалов как единое целое, неделимое на части. При этом операции нахождения максимума \vee и минимума \wedge двух интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ можно ввести в виде следующих теоретико-множественных конструкций

$$(8) \quad \tilde{a} \vee \tilde{b} = \{a \vee b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \{a \wedge b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}.$$

Таким образом, взятие максимума (минимума) двух интервалов \tilde{a} и \tilde{b} определяется, согласно (8), как нахождение множества максимумов (минимумов) двух точных величин a и b , при условии, что эти величины пробегают все возможные значения соответственно из интервалов \tilde{a} и \tilde{b} . Теперь для того, чтобы интервалы \tilde{a} и \tilde{b} можно было сравнить по величине, при этом установив их отношение $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, нужно, чтобы:

- 1) введённые операции \vee, \wedge над этими интервалами существовали;
- 2) эти операции давали в результате один из операндов: \tilde{a} или \tilde{b} ;
- 3) указанные две операции были согласованы, т.е. если большим (меньшим) оказывается один из интервалов, то меньшим (большим) является другой из них.

Сформулированное условие сравнимости величин интервалов является, очевидно, необходимым и достаточным.

Нетрудно доказать, что условие согласованности операций \vee и \wedge над интервалами всегда выполняется. Очевидно также, что эти операции существуют для любой пары \tilde{a}, \tilde{b} , причём результатом операции в общем случае оказывается некоторый новый интервал, отличный как от \tilde{a} , так и от \tilde{b} . Таким образом, необходимым и достаточным условием сравнимости интервалов \tilde{a} и \tilde{b} оказывается условие, по которому операции $\tilde{a} \vee \tilde{b}$ и $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ должны иметь своим результатом один из интервалов – \tilde{a} или \tilde{b} . Из этой формулировки условия сравнимости

интервалов выводятся различные его конструктивные формы, удобные для практического применения. Эти формы содержатся в нижеследующих теоремах 1 – 4.

Теорема 1. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1, a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1, b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(9) \quad a_1 \geq b_1, \quad a_2 \geq b_2,$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(10) \quad a_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq b_2.$$

Из этой теоремы вытекает, что любые интервалы \tilde{a}, \tilde{b} сравнимы по величине (по отношению \geq или \leq) и находятся в этом отношении только тогда, когда в таком же отношении находятся их одноименные границы a_1, b_1 и a_2, b_2 .

Значение теоремы 1 в том, что она сводит сравнение интервалов и выбор большего (меньшего) из них к очевидной операции сравнения границ указанных интервалов, являющихся вещественными числами.

Теорема 2. Для того чтобы два интервала $\tilde{a}=[a_1, a_2]$ и $\tilde{b}=[b_1, b_2]$ были несравнимы по величине (по отношению \geq или \leq), т.е. не находились в отношении $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ или $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(11) \quad (a_1 < b_1, a_2 > b_2) \quad \text{или} \quad (b_1 < a_1, b_2 > a_2).$$

Интервалы \tilde{a} и \tilde{b} несравнимы по отношениям \geq и \leq только тогда, когда один из них полностью «накрывает» другой. Смысл теоремы 2 в том, что она выявляет существование случаев несравнимости интервалов по отношениям \geq и \leq , в отличие от обычных вещественных чисел, которые всегда сравнимы по этим отношениям. Несравнимость некоторых интервалов – естественный результат того, что интервальные числа, в отличие от обычных вещественных чисел, задаются не точно, а с неопределённостью (число принимает некоторое значение в заданном интервале, но при этом не уточняется, какое именно это значение).

Будем рассматривать теперь систему нескольких интервалов

$$(12) \quad \tilde{a}_1 = [a_{11}, a_{12}], \tilde{a}_2 = [a_{21}, a_{22}], \tilde{a}_3 = [a_{31}, a_{32}], \dots$$

Сравнение по отношениям \geq, \leq величин интервалов выписанной системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется в результате попарного сравнения указанных интервалов, выполняемого в соответствии с теоремами 1 и 2. Главные результаты, получаемые этим путём, содержатся в нижеследующих теоремах 3 и 4.

Теорема 3. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении \geq , и этим интервалом являлся \tilde{a}_1 , необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноимённых границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$(13) \quad \begin{cases} a_{11} \geq a_{21}, a_{11} \geq a_{31}, a_{11} \geq a_{41}, \dots \\ a_{12} \geq a_{22}, a_{12} \geq a_{32}, a_{12} \geq a_{42}, \dots \end{cases}$$

Теорема 4. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении \leq , и этим интервалом являлся \tilde{a}_1 , необходимо и достаточно, чтобы границы данного интервала были расположены относительно одноимённых границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$(14) \quad \begin{cases} a_{11} \leq a_{21}, a_{11} \leq a_{31}, a_{11} \leq a_{41}, \dots \\ a_{12} \leq a_{22}, a_{12} \leq a_{32}, a_{12} \leq a_{42}, \dots \end{cases}.$$

Как показывают теоремы 3 и 4, интервал является максимальным (минимальным) в системе интервалов только тогда, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов и верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов. Подобно случаю сравнения двух интервалов, сравнение произвольного числа интервалов не выявит экстремального интервала, если интервалы, входящие в систему, попарно несравнимы.

До сих пор мы рассматривали процедуры выделения, вообще говоря, нестрого максимального (нестрого минимального) интервала, основанные на теоретико-множественных операциях (8) вычисления нестрого максимума (нестрого минимума) двух интервалов. Аналогично этому вводятся процедуры выделения строго максимального (строго минимального) интервала, т.е. единственного интервала, являющегося максимальным (минимальным).

Будем считать равными по определению совпадающие интервалы, т.е. для произвольных интервалов $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$, условие их равенства вводится таким образом:

$$(15) \quad (\tilde{a} = \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 = b_1, a_2 = b_2).$$

Из выражения (15) следует, что неравными являются интервалы, удовлетворяющие следующему условию:

$$(16) \quad (\tilde{a} \neq \tilde{b}) \Leftrightarrow (a_1 \neq b_1 \text{ или } a_2 \neq b_2).$$

Теперь определение того факта, что некоторый интервал \tilde{a} является строго максимальным из двух интервалов \tilde{a}, \tilde{b} можно записать в виде

$$(17) \quad (\tilde{a} > \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{b}, \tilde{a} \neq \tilde{b}),$$

аналогичным образом, определение того, что некоторый интервал \tilde{a} является строго минимальным из двух интервалов \tilde{a}, \tilde{b} записывается в виде

$$(18) \quad (\tilde{a} < \tilde{b}) \Leftrightarrow (\tilde{a} \vee \tilde{b} = \tilde{b}, \tilde{a} \wedge \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{a} \neq \tilde{b}).$$

Здесь \vee и \wedge – теоретико-множественные операции (8) вычисления максимума и минимума двух интервалов.

Из формулировки условий (17), (18) сравнимости интервалов в виде строгих неравенств между ними можно вывести различные конструктивные формы этих условий, удобные для практики. Такие формы содержатся в теоремах 5–8, которые подобны теоремам 1–4, дающим удобные конструктивные формы сравнимости интервалов в виде нестрогих неравенств.

Теорема 5. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2], \tilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} > \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(19) \quad (a_1 > b_1, a_2 \geq b_2) \text{ или } (a_1 \geq b_1, a_2 > b_2),$$

а для того чтобы эти интервалы были сравнимы по величине и находились в отношении $\tilde{a} < \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(20) \quad (a_1 < b_1, a_2 \leq b_2) \text{ или } (a_1 \leq b_1, a_2 < b_2).$$

Из теоремы ясно, что интервалы \tilde{a} и \tilde{b} сравнимы по величине (по отношению $>$ или $<$) и находятся в указанном отношении лишь тогда, когда в том же отношении находятся их нижние границы a_1, b_1 (при этом верхние границы a_2, b_2 находятся в соответствующем не-

строгом отношении: для $>$ это \geq , а для $<$ это \leq) или же, наоборот, их верхние границы a_2, b_2 (при этом нижние границы a_1, b_1 находятся в соответствующем нестрогом отношении).

Теорема 6. Для того чтобы два интервала $\tilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\tilde{b} = [b_1, b_2]$ были не сравнимы по величине (по отношению $>$ или $<$), т.е. не находились в отношении $\tilde{a} > \tilde{b}$ или $\tilde{a} < \tilde{b}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$(21) \quad (a_1 < b_1, a_2 > b_2) \text{ или } (b_1 < a_1, b_2 > a_2) \text{ или } (a_1 = b_1, a_2 = b_2).$$

Итак, произвольные интервалы \tilde{a} и \tilde{b} не сравнимы по отношениям $>$ и $<$ только в тех случаях, когда один из них полностью «накрывает» другой либо когда интервалы равны между собой. Значение теоремы 6 в том, что она показывает существование случаев несравнимости интервалов по отношениям $>$ и $<$ даже тогда, когда сравниваемые интервалы не равны между собой, а только «накрывают» один другой. Эта ситуация отличается от ситуации со сравнением вещественных чисел, где неравные числа всегда сравнимы по отношениям $>$ и $<$.

Рассмотрим теперь систему нескольких интервалов (12). Сравнение по отношениям $>$ и $<$ величин интервалов системы (12), рассматриваемых как интервальные числа, реализуется путем попарного сравнения этих интервалов, в соответствии с теоремами 5 и 6. Основные результаты, получаемые этим путём, изложены в нижеследующих теоремах 7 и 8.

Теорема 7. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал максимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $>$, и этим интервалом был \tilde{a}_1 , необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноимённых границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} > a_{21}, a_{12} \geq a_{22}) \text{ или } (a_{11} \geq a_{21}, a_{12} > a_{22}) \\ (a_{11} > a_{31}, a_{12} \geq a_{32}) \text{ или } (a_{11} \geq a_{31}, a_{12} > a_{32}) \\ (a_{11} > a_{41}, a_{12} \geq a_{42}) \text{ или } (a_{11} \geq a_{41}, a_{12} > a_{42}) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}.$$

Теорема 8. Для того чтобы в системе нескольких интервалов (12) существовал минимальный интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении $<$, и этим интервалом являлся \tilde{a}_1 , необходимо и достаточно, чтобы границы данного интервала были расположены относительно одноимённых границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} < a_{21}, a_{12} \leq a_{22}) \text{ или } (a_{11} \leq a_{21}, a_{12} < a_{22}) \\ (a_{11} < a_{31}, a_{12} \leq a_{32}) \text{ или } (a_{11} \leq a_{31}, a_{12} < a_{32}) \\ (a_{11} < a_{41}, a_{12} \leq a_{42}) \text{ или } (a_{11} \leq a_{41}, a_{12} < a_{42}) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}.$$

4 Решение задачи анализа поведения интервальной функции. Основные теоремы и алгоритм

В предыдущем разделе изложен вспомогательный для задачи анализа поведения интервальной функции материал, связанный со сравнением интервальных величин. Теперь можно перейти к анализу собственно поведения интервальных функций.

Рассмотрим произвольную интервальную функцию (2). Будем считать, что эта функция задана в разделённом виде (5), (6). Это не ограничивает общности рассмотрения, так как функция, заданная в неразделённом виде, всегда может быть приведена к разделённому виду (см. раздел 2). Будем также полагать, что нижняя и верхняя граничные функции интерваль-

ной функции непрерывны и дифференцируемы. Сформулируем условия, при которых функция возрастает, убывает, остается постоянной, достигает максимума (минимума), ведёт себя иным способом.

По аналогии с обычными (детерминированными) функциями [1] введём понятия возрастания, убывания, постоянства, максимума и минимума интервальной функции.

Определение 1. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из указанного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) < \tilde{f}(x_2)$.

Определение 2. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется убывающей на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $\tilde{f}(x_1) > \tilde{f}(x_2)$.

Определение 3. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется постоянной на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1 < x_2$, выполняется равенство $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$.

Определение 4. Точка $x = x_0$ называется точкой максимума заданной интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а само число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 , не совпадающих с x_0 , истинно строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$.

Определение 5. Точка $x = x_0$ называется точкой минимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – минимумом этой функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 , не совпадающих с x_0 , выполняется строгое неравенство $\tilde{f}(x_0) < \tilde{f}(x)$.

Введём теперь понятия расширения и сужения интервальной функции, которые не применимы к обычным (детерминированным) функциям.

Определение 6. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется расширяющейся на интервале (a, b) , если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью «накрывает» интервал $\tilde{f}(x_1)$.

Определение 7. Интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ называется сужающейся на интервале (a, b) , если для любых x_1 и x_2 из данного интервала, для которых $x_1 < x_2$, интервал $\tilde{f}(x_1)$ полностью «накрывает» интервал $\tilde{f}(x_2)$.

Определение 8. Точку $x = x_0$ будем называть точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $D(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ – максимальной шириной указанной функции, если для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 , не совпадающих с x_0 , интервал $\tilde{f}(x_0)$ полностью «накрывает» интервал $\tilde{f}(x)$.

Определение 9. Точку $x = x_0$ будем называть точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $d(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ – минимальной шириной функции $\tilde{f}(x)$, если для всех точек x некоторой окрестности точки x_0 , не совпадающих с x_0 , интервал $\tilde{f}(x)$ полностью «накрывает» $\tilde{f}(x_0)$.

Сформулируем и докажем условия, которые определяют то или иное поведение интервальной функции.

Теорема 9. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ являлась возрастающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале её нижняя граничная функция $f_1(x)$ была возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была возрастающей, а функция $f_1(x)$ – неубывающей.

Доказательство. Представим интервальную функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y} = [f_1(x), f_2(x)]$. Возрастание данной функции на интервале (a, b) по определению 1 означает, что для любых x_1, x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $[f_1(x_1), f_2(x_1)] < [f_1(x_2), f_2(x_2)]$, которое, по теореме 5, приводит к двум возможным вариантам:

$$f_1(x_1) < f_1(x_2), f_2(x_1) \leq f_2(x_2) \text{ или } f_1(x_1) \leq f_1(x_2), f_2(x_1) < f_2(x_2).$$

Итак, либо на всём интервале (a, b) нижняя граничная функция $f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ является возрастающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – неубывающей либо наоборот, $f_2(x)$ является возрастающей, $f_1(x)$ – неубывающей, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была убывающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы на указанном интервале её нижняя граничная функция $f_1(x)$ была убывающей, а верхняя граничная функция $f_2(x)$ – невозрастающей либо, наоборот, функция $f_2(x)$ была убывающей, а функция $f_1(x)$ – невозрастающей.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9, однако использует определение 2 вместо определения 1.

Теорема 11. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была постоянной на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале её нижняя $f_1(x)$ и верхняя $f_2(x)$ граничные функции были постоянными.

Доказательство следует из определения интервала как множества всех вещественных чисел между заданными двумя числами – границами интервала, включая сами границы.

Теорема 12. Для того чтобы $x = x_0$ была точкой максимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – максимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в указанной точке достигала максимума её нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала минимума её верхняя граничная функция $f_2(x)$ либо, наоборот, достигала максимума её верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала минимума её нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство. Представим нашу интервальную функцию $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ в интервальной форме (5): $\tilde{y} = [f_1(x), f_2(x)]$. Существование максимума этой функции в точке $x = x_0$ по определению 4 означает, что для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0 , не совпадающих с x_0 , выполняется неравенство $\tilde{f}(x_0) > \tilde{f}(x)$ или, в интервальной форме $[f_1(x_0), f_2(x_0)] > [f_1(x), f_2(x)]$, причём последнее неравенство, согласно теореме 5, эквивалентно условию

$$(f_1(x_0) > f_1(x), f_2(x_0) \geq f_2(x)) \text{ или } (f_1(x_0) \geq f_1(x), f_2(x_0) > f_2(x)).$$

Условия левой скобки показывают, что в точке x_0 функция $f_1(x)$ обращается в максимум, функция $f_2(x)$ при этом не обращается в минимум. Условия правой скобки говорят, что в точке x_0 функция $f_2(x)$ обращается в максимум, а функция $f_1(x)$ не обращается в минимум, что и требовалось доказать.

Теорема 13. Для того чтобы $x = x_0$ была точкой минимума интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $\tilde{f}(x_0)$ – минимумом этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в указанной точке достигала минимума её нижняя граничная функция $f_1(x)$ и не достигала максимума её верхняя граничная функция $f_2(x)$ либо, наоборот, достигала минимума её верхняя граничная функция $f_2(x)$ и не достигала максимума её нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство теоремы 13 аналогично доказательству теоремы 12, но использует определение 5.

Теорема 14. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ являлась расширяющейся на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале была убывающей её нижняя граничная функция $f_1(x)$ и была возрастающей её верхняя граничная функция $f_2(x)$.

Доказательство. Для любых x_1, x_2 из интервала (a, b) , таких, что $x_1 < x_2$, в силу расширения функции f на этом интервале должно выполняться условие: интервал $\tilde{f}(x_2)$ полностью «накрывает» $\tilde{f}(x_1)$. Выражая интервалы в интервальной форме $\tilde{f}(x_1) = [f_1(x_1), f_2(x_1)]$, $\tilde{f}(x_2) = [f_1(x_2), f_2(x_2)]$, имеем условие «накрытия» интервалов:

$$f_1(x_2) < f_1(x_1), \quad f_2(x_2) > f_2(x_1).$$

Первое из неравенств показывает, что функция $f_1(x)$ убывающая, а второе – что функция $f_2(x)$ возрастающая. Что и требовалось доказать.

Теорема 15. Для того чтобы интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была сужающейся на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы на данном интервале была убывающей её верхняя граничная функция $f_2(x)$ и была возрастающей её нижняя граничная функция $f_1(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

Теорема 16. Для того чтобы точка $x = x_0$ являлась точкой максимального расширения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $D(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ максимальной шириной этой функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была расширяющейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была сужающейся.

Теорема 17. Для того чтобы точка $x = x_0$ была точкой максимального сужения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а число $d(x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0)$ минимальной шириной данной функции, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки x_0 слева функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ была сужающейся, а в некоторой окрестности точки x_0 справа она была расширяющейся.

Доказательства теорем 16 и 17 вытекают прямо из определений 8 и 9 точек максимального расширения и сужения интервальной функции.

Анализ поведения интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, согласно изложенному в этом разделе материалу, всегда сводится к анализу поведения двух обычных детерминированных

функций: нижней $f_1(x)$ и верхней $f_2(x)$ граничных функций функции $\tilde{f}(x)$. Это позволяет использовать для анализа поведения интервальных функций хорошо известные и разработанные методы анализа поведения обычных (детерминированных) функций, основанные на применении классического дифференциального исчисления [1]. При этом алгоритм анализа поведения произвольной интервальной функции может быть описан следующим образом.

Шаг 1. Проверка формы, в которой представлена интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, подлежащая анализу. Если она неразделённая, т.е. не имеющая вид интервала $\tilde{y} = [y_1, y_2] = [f_1(x), f_2(x)]$, где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ – соответственно нижняя и верхняя граничные функции заданной интервальной функции, то выполняем переход к шагу 2. Если она разделённая, т.е. имеющая указанный вид, то переход к шагу 3.

Шаг 2. Приведение функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ из неразделённого вида к разделённому с помощью основных формул интервальной математики (7) (см. раздел 2).

Шаг 3. Анализ поведения нижней граничной функции $y_1 = f_1(x)$ интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ с помощью известных методов анализа поведения обычных (детерминированных) функций, на основе классического дифференциального исчисления. В ходе анализа устанавливаем интервалы возрастания и убывания функции f_1 и точки её максимумов и минимумов.

Шаг 4. Анализ поведения верхней граничной функции $y_2 = f_2(x)$ интервальной функции выполняется теми же методами и по той же программе, что и предыдущий шаг.

Шаг 5. Составление сводной таблицы поведения граничных функций $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ путём заполнения в ней первых трёх строк (см. таблицу, в соответствии с результатом анализа поведения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (шаги 3, 4).

Шаг 6. Анализ сводной таблицы с помощью теорем 9–15, позволяющих идентифицировать последовательные интервалы $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$ в ней как интервалы возрастания, убывания, расширения или сужения анализируемой интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$, а промежуточные точки x_1, x_2, \dots, x_n между интервалами как точки максимума (минимума) $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ или точки максимума (минимума) её расширения или сужения. Например, если на некотором интервале (x_i, x_{i+1}) функция $f_2(x)$ возрастает, а на соседнем интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) убывает, так что в точке x_{i+1} она максимальна, и при этом функция $f_1(x)$ на обоих интервалах постоянная, то согласно теоремам 9, 10, 12 интервальная функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ на интервале (x_i, x_{i+1}) возрастает, в точке x_{i+1} достигает максимума, затем на интервале (x_{i+1}, x_{i+2}) убывает.

После выполнения шага 6 заполняется четвёртая строка сводной таблицы поведения и на этом анализ поведения заданной интервальной функции заканчивается. Характерный возможный вид четвёртой строки сводной таблицы поведения интервальной функции проиллюстрирован в таблице. По результатам анализа можно вычертить график функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ (см. рисунок).

Заключение

В настоящей статье разработаны систематические методы решения задач расчёта и анализа поведения недетерминированных функций интервального типа, в которых функции определяются с точностью до интервала возможных значений. В качестве математического аппарата использованы интервальная алгебра и дифференциальные характеристики верхней и

нижней границ интервальных функций, которые можно рассматривать как специальное дифференциальное исчисление для неточно задаваемых функций интервального типа.

Таблица – Сводная таблица поведения граничных функций, определяющих интервальную функцию

y	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)	x_3	(x_3, x_4)	...	(x_{n-1}, x_n)	x_n	(x_n, ∞)
$y_1 = f_1(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	...	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$y_2 = f_2(x)$	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная	...	монотонная	возможный экстремум f_1 или f_2	монотонная
$\tilde{y} = \tilde{f}(x)$	возрастание	максимум	убывание	минимум	расширение	максимальное расширение	сужение	...	сужение	максимальное сужение	расширение

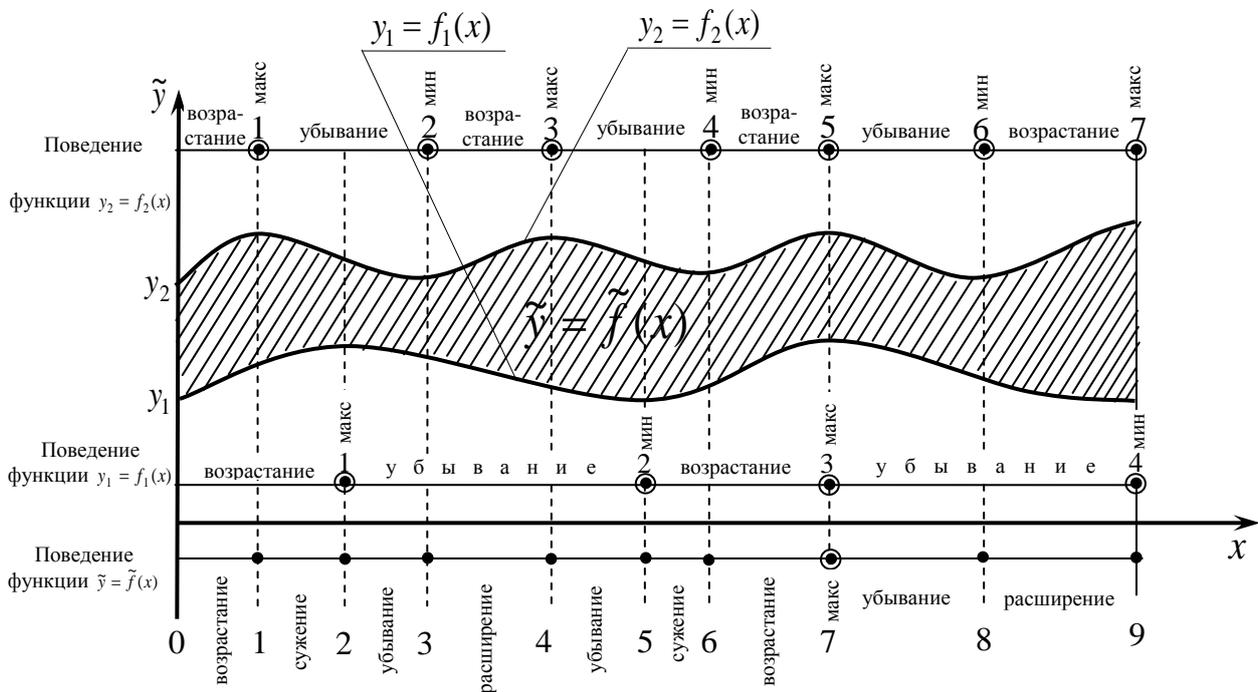


Рисунок - Пример интервальной функции $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ ($y_1 = f_1(x)$ – нижняя граничная функция, $y_2 = f_2(x)$ – верхняя граничная функция)

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.
 - [2] **Левин, В.И.** Интервальная производная и начала недетерминистского дифференциального исчисления / В.И. Левин // *Онтология проектирования*. – 2013. – № 4(10). – С. 72–84.
 - [3] **Милн, В.Э.** Численный анализ / В.Э. Милн. – М.: Издательство иностранной литературы, 1980. – 350 с.
 - [4] **Алефельд, Г.** Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
 - [5] **Левин, В.И.** Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределённости / В.И. Левин. – Пенза: Изд-во Пензенского технологического института, 1999. – 101 с.
 - [6] **Левин, В.И.** Оптимизация в условиях интервальной неопределённости. Метод детерминизации / В.И. Левин // *Автоматика и вычислительная техника*. – 2012. – №4. – С. 17–25.
 - [7] **Tsoukias, A.** A Characterization of PQI Interval Orders / A. Tsoukias, P. Vincke // *Discrete Applied Mathematics*. – 2003. - №127(2). – P. 387-397.
 - [8] **Ozturk, M.** Positive Negative Reasons in the Interval Comparisons: Valued PQI Interval Orders / M. Ozturk, A. Tsoukias // *LAMSADE-CNRS: Universite Paris Dauphine*. 2004. – 7 p.
 - [9] **Davidov, D.V.** Identification of Parameters of Linear Interval Controllable Systems with the Interval Observation / D.V. Davidov // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2008. - Vol. 47. – №6. – P. 861–865.
 - [10] **Пиявский, С.А.** Простой и универсальный метод принятия решений в пространстве критериев «стоимость–эффективность» / С.А. Пиявский // *Онтология проектирования*. – 2014. – № 3(13). – С. 89–102.
 - [11] **Боргест, Н.М.** Ключевые термины онтологии проектирования: обзор, анализ, обобщения / Н.М. Боргест // *Онтология проектирования*. – 2013. – № 3(9). – С. 9–31.
-

ANALYSIS OF FUNCTIONS WHICH SPECIFIED UP TO INTERVAL

V.I. Levin

Penza State Technological University, Penza, Russia
vilevin@mail.ru

Abstract

The existing approaches to the calculation, analysis, synthesis and optimization of systems under conditions of uncertainty are considered. The problem of calculating and analyzing the behavior of is not fully determined function specified up to a range of possible values is formulated and described in detail. To solve this problem, an algorithm of determination is proposed, which reduces the problem to two similar problems - the upper and lower boundary functions of the original incompletely defined function. This algorithm uses means of interval mathematics and interval-differential calculus. We highlighted the different types of possible behavior of interval functions (consistency, increase, decrease, expansion, contraction) and various types of extreme points of these functions (the maximum point, minimum point, the point of maximum expansion, the point of minimum expansion). The theorems admitting to allocate areas in the different behavior of interval functions and points of their various extreme are proved. The execution of the proposed determination algorithm that allows to analyze the behavior of interval functions is described. This operation is illustrated in the specific example.

Keywords: *problem of system optimization, uncertainty, deterministic function, interval function, analysis of functions, boundary function.*

References

- [1] **Fihtengolz, G.M.** Kurs Differencialnogo i Integralnogo Ischisleniya. T. 1. [Course of differential and integral calculus. Vol. 1] / G.M. Fihtengolz. – М.: Fizmatlit, 2001. – 616 p. (In Russian).
- [2] **Levin, V.I.** Intervalnaya Proizvodnaya i Nachala Nedeterministskogo Differencialnogo Ischisleniya [The interval derivative and the basis of nondeterministic differential calculus] / V.I. Levin // *Ontologia Proektirovania*. – 2013. – № 4(10). – P. 72–84. (In Russian).
- [3] **Miln, V.E.** Chislennyi analiz [Numerical analysis] / V.E. Miln. – М.: Izdatelstvo Inostrannoy Literatury, 1980. – 350 p.
- [4] **Alefeld, G.** Introduction to Interval computation / G. Alefeld, J. Herzberger. – N.Y.: Academic Press, 1983 – 352 p.

- [5] **Levin, V.I.** Intervalnye Metody Optimizacii Sistem v Usloviyah Neopredelennosti [Interval methods of optimization systems under uncertainty] / V.I. Levin. – Penza: Izd-vo Penzenskogo Technologicheskogo instituta, 1999. – 101 p. (In Russian).
- [6] **Levin, V.I.** Optimizaciya v Usloviyah Intervanoy Neopredelennosti. Metod Determinizacii [Optimization under interval uncertainty. Determinization method] / V.I. Levin // Avtomatika i Vychislitel'naya Tehnika. – 2012. – No. 4. – P. 157-163. (In Russian).
- [7] **Tsoukias, A.** A Characterization of PQI Interval Orders / A. Tsoukias, P. Vincke // Discrete Applied Mathematics. – 2003. - №127(2). – P. 387-397.
- [8] **Ozturk, M.** Positive Negative Reasons in the Interval Comparisons: Valued PQI Interval Orders / M. Ozturk, A. Tsoukias // LAMSADE-CNRS: Universite Paris Dauphine. 2004. – 7 p.
- [9] **Davidov, D.V.** Identification of Parameters of Linear Interval Controllable Systems with the Interval Observation / D.V. Davidov // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2008. - Vol. 47. – №6. – P. 861–865.
- [10] **Piyavskiy, S.A.** Prostoy I Universalniy Metod Prinyatiya Resheniy v Prostranstve Kriteriev «Stoimost'–Effektivnost'» [A Simple and universal method of decision making within the scope of criteria of “cost and efficiency”] / S.A. Piyavskiy // Ontologia Proektirovaniya. – 2014. – No. 3(13). – P. 89–102. ISSN 2223-9537 / 2313-1039 (In Russian).
- [11] **Borgest, N.M.** Kluchevye Terminy Ontologii Proektirovaniya: obzor, analiz, obobsheniya [Keywords of Ontology of Designing: Review, Analysis, Generalisation] / N.M. Borgest // Ontologia Proektirovaniya. – 2013. – No. 3(9). – P. 9–31. ISSN 2223-9537 / 2313-1039 (In Russian).

Сведения об авторе



Левин Виталий Ильич окончил Каунасский политехнический институт, Открытый университет Израиля. Доктор технических наук, профессор, PhD, Full Professor, заведующий кафедрой математики (1975–2000), советник ректора по науке (2006–2011) Пензенского государственного технологического университета, профессор Московского университета им. С.Ю. Витте (с 2003 г.). В списке научных трудов сотни работ (в том числе десятки монографий) по логике; математическому моделированию в технике, экономике, социологии, принятию решений; оптимизации; теории надёжности; истории науки; проблемам образования. Действительный член МАИ, ЕАИ, МАНЭБ и АСН, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат международных премий «Соросовский профессор», международный эксперт в области социологии конфликта и рейтингования университетов.

Vitaliy Ilyich Levin graduated from Kaunas Politechnical Institute, Open University of Israel, Doctor of Engineering Science, Professor, PhD, Full Professor. Head of Mathematics Department (1975–2000), the scientific counselor of rector (2006–2011) of Penza State Technological University, professor of Moscow University named after S.J. Vitte (since 2003). He is the autor of hundreds of publications (among them dozens of monographs), in logic; mathematical modelling of engineering, economics, sociology; optimization; reliability; history of science; education problems. The member of IIA, EIA, IAELP, ASS. Honoured scientist of Russia, Laureate of International Prizes “Soros Professor”, International Reviewer in Sociology of conflicts and University ranking.